GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

SĂ ÎNVĂȚĂM MATEMATICĂ FĂRĂ PROFESOR

CLASA A XII – A

PROFIL ȘTIINȚE ALE NATURII

EDITURA HYPERION
CRAIOVA 2023

CUPRINS

		Enunţuri	Rezolvări
1.	**Elemente de algebră**	5	150
	1.1 Grupuri	5	150
	1.1.1 Lege de compoziţie internă (operaţie algebrică), tabla operaţiei, parte stabilă	5	150
	a) Noţiuni teoretice şi exemple	5	
	b) Probleme rezolvate	8	
	c) Probleme propuse spre rezolvare	15	
	1.1.2 Grup, exemple de grupuri, grupuri de matrice, grupuri de permutări, $\mathbf{Z}_n$	18	153
	a) Noţiuni teoretice şi exemple	18	
	b) Probleme rezolvate	18	
	c) Probleme propuse spre rezolvare	25	
	1.1.3 Morfism şi izomorfism de grupuri	27	155
	a) Noţiuni teoretice şi exemple	27	
	b) Probleme rezolvate	27	
	c) Probleme propuse spre rezolvare	33	
	1.2 Inele şi corpuri	35	156
	1.2.1 Inele	35	156
	a) Noţiuni teoretice şi exemple	35	
	b) Probleme rezolvate	36	
	c) Probleme propuse spre rezolvare	43	
	1.2.2 Corpuri	45	159
	a) Noţiuni teoretice şi exemple	45	
	b) Probleme rezolvate	45	
	c) Probleme propuse spre rezolvare	50	
	1.3 Inele de polinoame cu coeficienţi într-un corp comutativ (**Q, R, C,** $\mathbf{Z}_p$, p prim)	52	162
	1.3.1 Forma algebrică a unui polinom, operaţii (adunarea, înmulţirea, înmulţirea cu un scalar). Teorema împărţirii cu rest; împărţirea polinoamelor, împărţirea cu $X - a$, schema lui Horner. Divizibilitatea polinoamelor, teorema lui Bezout, c.m.m.d.c şi c.m.m.m.c a două olinoame	52	162
	a) Noţiuni teoretice şi exemple	52	

b) Probleme rezolvate	56	
c) Probleme propuse spre rezolvare	62	
1.3.2 Rădăcini ale polinoamelor. Relațiile lui Viete pentru polinoame de grad cel mult 4	65	165
a) Noțiuni teoretice și exemple	65	
b) Probleme rezolvate	67	
c) Probleme propuse spre rezolvare	77	
1.3.3 Rezolvarea ecuațiilor algebrice	80	171
a) Noțiuni teoretice și exemple	80	
b) Probleme rezolvate	81	
c) Probleme propuse spre rezolvare	83	
1.4 Teste grilă de autoevaluare	85	172
Testul 1	85	172
Testul 2	86	173
Testul 3	87	174
Testul 4	88	175
Testul 5	89	176
Testul 6	90	177
2. Elemente de analiză matematică	91	177
2.1 Primitive	91	177
a) Noțiuni teoretice și exemple	91	
b) Probleme rezolvate	91	
c) Probleme propuse spre rezolvare	94	
2.2 Integrala nedefinită	96	178
a) Noțiuni teoretice și exemple	96	
b) Probleme rezolvate	98	
c) Probleme propuse spre rezolvare	101	
2.3 Metoda de integrare prin părți	104	180
a) Noțiuni teoretice și exemple	104	
b) Probleme rezolvate	104	
c) Probleme propuse spre rezolvare	107	
2.4 Metoda de integrare prin schimbare de variabilă	109	181
a) Noțiuni teoretice și exemple	109	
b) Probleme rezolvate	110	
c) Probleme propuse spre rezolvare	114	
2.5 Integrarea funcțiilor raționale	117	182
a) Noțiuni teoretice și exemple	117	
b) Probleme rezolvate	120	
c) Probleme propuse spre rezolvare	123	

	2.6 Teste grilă de autoevaluare	125	184
	Testul 1	125	184
	Testul 2	126	185
3.	**Integrala definită**	127	185
	3.1 Formula lui Leibniz-Newton. Proprietăți ale integralei definite	127	185
	a) Noțiuni teoretice și exemple	127	
	b) Probleme rezolvate	128	
	c) Probleme propuse spre rezolvare	131	
	3.2 Metode de calcul pentru integrala definită	133	187
	3.2.1 Metoda de integrare prin părți	133	187
	a) Noțiuni teoretice și exemple	133	
	b) Probleme rezolvate	133	
	c) Probleme propuse spre rezolvare	134	
	3.2.2 Metoda de integrare prin schimbarea de variabilă	136	189
	a) Noțiuni teoretice și exemple	136	
	b) Probleme rezolvate	136	
	c) Probleme propuse spre rezolvare	137	
	3.3 Integrarea funcțiilor raționale	139	191
	a) Noțiuni teoretice și exemple	139	
	b) Probleme rezolvate	139	
	c) Probleme propuse spre rezolvare	141	
	3.4 Teste grilă de autoevaluare	143	193
	Testul 1	143	193
	Testul 2	144	194
	Testul 3	145	195
4.	Aplicații ale integralei definite	146	196
	a) Noțiuni teoretice și exemple	146	
	b) Probleme rezolvate	146	
	c) Probleme propuse spre rezolvare	148	

1. Elemente de algebră
1.1 Grupuri
1.1.1 Lege de compoziție internă (operație algebrică), table operației, parte stabilă
a) Noțiuni teoretice și exemple

Definiție. Fiind dată o mulțime nevidă **M**, numim lege de compoziție pe mulțimea M, o funcție φ: $\mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$.

Legea de compoziție se notează cu diverse simboluri: $+, \cdot, *$, $\circ, \perp, \cdots$ și atunci se folosește una din notații $\varphi(x,y) = x + y$, $\varphi(x,y) = x \cdot y, \varphi(x,y) = x * y, \cdots$.

Exemple. a) Operația de adunare „+” pe mulțimile **Z, Q, R, C.**
b) Operația de înmulțire „·” pe mulțimile **N, Z, Q, R, C.**
c) Operațiile de adunare și înmulțire pe mulțimea matricelor $M_n(\mathbf{C})$.

Observație. Dacă mulțimea **M** este finită, atunci legea de compoziție φ poate fi reprezentată printr-un **tabel**.

Exemplu. Fie $\mathbf{M} = \{1,2,3\}$ și $\varphi: \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}, \varphi(x) = \min(x,y)$.

Avem: $\min(1,1) = 1$; $\min(1,2) = 1$; $\min(1,3) = 1$;
$\min(2,1) = 1$; $\min(2,2) = 2$; $\min(2,3) = 2$;
$\min(3,1) = 1$; $\min(3,2) = 2$; $\min(3,3) = 3$.

Tabelul este următorul:

φ	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

Definiție. Fie **M** o mulțime nevidă și $\varphi: \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ o lege de compoziție pe **M**. O submulțime nevidă $\mathbf{S} \subset \mathbf{M}$ se numește **parte stabilă** a lui **M** în raport cu legea φ, dacă oricare ar fi $x, y \in \mathbf{S}$, rezultă $\varphi(x,y) \in \mathbf{S}$.

Exemple. a) Mulțimile de numere **N**, **Z**, **Q** sunt părți stabile ale lui **R** în raport cu operația de adunare și în raport cu operația de înmulțire.
b) Dacă **A** este o mulțime nevidă, atunci mulțimea funcțiilor: $F_{inj} = \{f: \mathbf{A} \to \mathbf{A}, f$ este injectivă$\}$ este parte stabilă a mulțimii $F_{\mathbf{A}} = \{f: \mathbf{A} \to \mathbf{A}\}$ în raport cu compunerea funcțiilor, deoarece compunerea a două funcții injective este tot funcție injectivă.

Proprietăți

1) Asociativitatea

O lege de compoziție notată $*: \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ se numește **asociativă** dacă $(\forall)x, y, z \in \mathbf{M}$ avem: $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Exemple de legi asociative.

a) Adunarea pe mulțimile de numere $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ este **asociativă** deoarece: $(x + y) + z = x + (y + z)$ pentru orice x, y, z în fiecare din mulțimile din enunț.

b) Înmulțirea pe mulțimile de numere $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ este **asociativă** deoarece: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ pentru orice x, y, z în fiecare din mulțimile din enunț.

c) Adunarea matricelor pe mulțimea $M_n(\mathbf{C})$ este **asociativă** deoarece: $(A + B) + C = A + (B + C), (\forall)A, B, C \in M_n(\mathbf{C})$.

d) Înmulțirea matricelor pe mulțimea $M_n(\mathbf{C})$ este **asociativă** deoarece: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C), (\forall)A, B, C \in M_n(\mathbf{C})$.

e) Compunerea funcțiilor pe mulțimea $F_{\mathbf{A}}$ $\{f: \mathbf{A} \to \mathbf{A}\}$ este **asociativă** deoarece $(fog)oh = fo(goh), (\forall)f, g, h \in F_A$.

Exemple de legi care nu sunt asociative

a) Scăderea pe mulțimile **Z, Q, R, C, nu este asociativă** deoarece: $(4 - 2) - 5 \neq 4 - (2 - 5)$.

b) Scăderea matricelor pe mulțimea $M_n(\mathbf{C})$ **nu este asociativă** deoarece: $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq$

$$\neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right).$$

2) Comutativitatea

O lege de compoziție notată $*: \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ se numește **comutativă** dacă $(\forall)x, y \in \mathbf{M}$ avem: $x * y = y * x$.

Exemple de legi comutative

a) Adunarea pe mulțimile de numere $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ este **comutativă** deoarece: $x + y = y + x$ pentru orice x, y în fiecare din mulțimile din enunț.

b) Înmulțirea pe mulțimile de numere $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ este **comutativă** deoarece: $x \cdot y = y \cdot x$ pentru orice x, y în fiecare din mulțimile din enunț.

c) Adunarea matricelor pe mulțimea $M_n(\mathbf{C})$ este comutativă deoarece: $A + B = B + A, (\forall)A, B \in M_n(\mathbf{C})$.

Exemple de legi care nu sunt comutative

a) Scăderea pe mulțimile **Z, Q, R, C, nu este comutativă** deoarece: $5 - 3 \neq 3 - 5$.

b) Scăderea matricelor pe mulțimea $M_n(\mathbf{C})$ **nu este comutativă** deoarece: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

c) Compunerea funcțiilor pe mulțimea $F_{\mathbf{A}} = \{f: \mathbf{A} \to \mathbf{A}\}$ **nu este comutativă** deoarece fiind date funcțiile $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2, (fog)(x) = x^2 + 1$ și $(gof)(x) = (x + 1)^2$.

3) Element neutru

O lege de compoziție notată $*: \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ admite **element neutru** dacă $(\exists)\, e \in \mathbf{M}$ astfel încât să avem: $x * e = e * x = x\ (\forall)x \in \mathbf{M}$.

Observație. Dacă legea $*$ este comutativă, atunci se determină $e \in \mathbf{M}$ astfel încât $x * e = x\ (\forall)x \in \mathbf{M}$.

Exemple de legi care admit element neutru

a) Numărul 0 este **element neutru** în raport cu adunarea numerelor întregi, raționale, reale.

b) Numărul 1 este **element neutru** în raport cu înmulțirea numerelor întregi, raționale, reale.

c) Matricea $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ este **element neutru** în raport cu adunarea matricelor din $M_2(\mathbf{R})$.

Exemple de legi care nu admit element neutru

a) Mulțimea numerelor naturale pare $\{2k \mid k \in \mathbf{N}\}$ este parte stabilă a lui **N** în raport cu înmulțirea și legea indusă de înmulțire pe această mulțime nu admite element neutru. Într-adevăr dacă ar exista $e \in \{2k \mid k \in \mathbf{N}\}$ încât $e = ex = x\ (\forall)x \in \{2k \mid k \in \mathbf{N}\}$, atunci $e = 2k = 1$ cu $k \in \mathbf{N}$, ceea ce nu se poate.

4) Elemente simetrizabile

Fie **M** o mulțime nevidă și o lege de compoziție notată $*: \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ care admite element neutru. Un element $x \in \mathbf{M}$ se numește simetrizabil în raport cu legea de compoziție $*$ dacă

$(\exists)\ x' \in \mathbf{M}$ astfel încât să avem : $x * x' = x' * x = e$. Elementul x' se numește simetricul elementului x față de legea de compoziție $*$.

Observație. Dacă legea de compoziție $*$ este în plus și asociativă, atunci simetricul unui element x dacă există este unic.

Teoremă. Fie $\mathbf{M}$ o mulțime nevidă și o lege de compoziție notată multiplicativ $\cdot : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ care este asociativă și care admite element neutru.

a) Dacă $e \in \mathbf{M}$ admite element neutru, atunci $e^{-1} = e$.

b) Dacă $x \in \mathbf{M}$ este inversabil, atunci și x^{-1} este inversabil și are loc relația: $(x^{-1})^{-1} = x$.

c) Dacă $x, y \in \mathbf{M}$ sunt inversabile, atunci și xy este inversabil și are loc relația: $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Exemple de elemente simetrizabile în raport cu o lege de compoziție

a) Orice x întreg, rațional, real sau complex este simetrizabil în raport cu adunarea și admite ca simetric pe $-x$.

b) Orice $x \neq 0$ rațional sau real este simetrizabil în raport cu înmulțirea și admite ca simetric pe $\frac{1}{x}$.

c) Orice matrice $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$ este simetrizabilă în raport cu adunarea matricelor și admite ca simetric pe $-A$.

Exemple de elemente care nu sunt simetrizabile în raport cu o lege de compoziție

a) Orice $x \in \mathbf{N}^*$ nu este simetrizabil în raport cu adunarea deoarece $-x \notin \mathbf{N}$.

b) Orice $x \in \mathbf{Z}^*$ nu este simetrizabil în raport cu înmulțirea deoarece $\frac{1}{x} \notin \mathbf{Z}$.

b) Probleme rezolvate

1. Fie $\mathrm{M} = \{0, 1, 2\}$. Stabiliți dacă M este parte stabilă a mulțimii $\mathbf{N}$ în raport cu fiecare dintre următoarele legi de compoziție:

a) $x * y = x + y$ b) $x * y = \max\{x, y\}$.

Soluție. a) Tabelul este următorul:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4

Evident M nu este parte stabilă a mulțimii **N** în raport cu $x * y = x + y$.

a) Tabelul este următorul:

max	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

Evident M este parte stabilă a mulțimii **N** în raport cu $x * y =$
$= \max\{x, y\}$

2. Arătați în fiecare din următoarele cazuri că mulţimea M este parte stabilă a mulţimii E în raport cu legea de compoziţie specificată:

a) $\mathrm{M} = [-5, +\infty)$, $\mathrm{E} = \mathbf{R}$, $x * y = xy + 5x + 5y + 20$

b) $\mathrm{M} = (-1, 0)$, $\mathrm{E} = \mathbf{R}$, $x * y = xy + x + y$

c) $\mathrm{M} = (1, 2)$, $\mathrm{E} = \mathbf{R}$, $x * y = \dfrac{3xy - 4x - 4y + 6}{2xy - 3x - 3y + 5}$.

Soluţie. Se arate că $(\forall) x, y \in \mathrm{M}$ rezultă $x * y \in \mathrm{M}$.

a) $x, y \in [-5, +\infty) \Rightarrow x \geq -5, y \geq -5 \Rightarrow x + 5 \geq 0, y + 5 \geq 0$.
$x * y \geq -5 \Leftrightarrow xy + 5x + 5y + 25 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 5)(y + 5) \geq 0$, ceea ce este adevărat.

b) $x, y \in (-1, 0) \Rightarrow x + 1 > 0, y + 1 > 0, x < 0, y < 0$.
Se demonstrează: $-1 < x * y < 0 \Leftrightarrow -1 < xy + x + y < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x + 1)(y + 1) > 0$ și $x(y + 1) + y < 0$, inegalități evident adevărate.

c) $x, y, \in (1, 2) \Rightarrow x = 1 + a, y = 1 + b$ unde $a, b \in (0, 1)$.

$$x * y = (1 + a) * (1 + b) = \ldots = \frac{3ab - a - b + 1}{2ab - a - b + 1}$$

$$x * y > 1 \Leftrightarrow \frac{3ab - a - b + 1}{2ab - a - b + 1} > 1 \Leftrightarrow \frac{ab}{ab + (1 - a)(1 - b)} > 0$$

$$x * y < 2 \Leftrightarrow \frac{(1 - a) \cdot (1 - b)}{ab + (1 - a)(1 - b)} > 0$$

adevărată oricare ar fi $a, b \in (0, 1)$.

3. Arătați în fiecare din următoarele cazuri că mulțimea M este parte stabilă a mulțimii E în raport cu legea de compoziție specificată:

a) $M=[4,+\infty)$, $E=\mathbf{R}$, $x*y=\sqrt{x^2+y^2-16}$

b) $M=\left\{\begin{pmatrix} x & 2y \\ 3y & 4x \end{pmatrix} \middle| x,y\in \mathbf{N}\right\}$, $E=\mathbf{M_2(R)}$

c) $M=(1,+\infty)\times(2,+\infty)$, $E=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$

$(x,y)*(x',y')=(xx'-x-x'+2,\ yy'-2y-2y'+6)$.

Soluție. Se arate că $(\forall)x,y\in M$ rezultă $x*y\in M$.

a) $x,y\in[4,+\infty)\Rightarrow x\geq 4, y\geq 4\Rightarrow x^2\geq 16, y^2\geq 16\Rightarrow$
$\Rightarrow x^2+y^2-16\geq 16\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2-16}\geq 4\Rightarrow x*y\in[4,+\infty)$.

b) Fie $A,B\in M\Rightarrow A=\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & 4a \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} c & 2d \\ 3d & 4c \end{pmatrix}$, unde
$a,b,c,d\in N\Rightarrow A+B=\begin{pmatrix} a+c & 2(b+d) \\ 3(b+d) & 4(a+c) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e & 2f \\ 3f & 4e \end{pmatrix}$,
unde $e=a+c\in N$ și $f=b+d\in N$. Deci $A+B\in M$

c) $(x,y), (x',y')\in M\Rightarrow x,x'>1;\ y,y'>2$.
$(x,y)*(x',y')=(xx'-x-x'+2,\ yy'-2y-2y'+6)$

Se arată cu uşurinţă că $xx'-x-x'+2>1$ şi
$yy'-2y-2y'+6>2$, $(\forall)\ x,x'>1;\ y,y'>2$. Deci $(x,y)*(x',y')\in M$.

4. Determină $a\in\mathbf{R}$ astfel încât mulțimea $M=[1,+\infty)$ să fie parte stabilă a lui $\mathbf{R}$ în raport cu legea $x*y=xy-x-y+a$.

Soluție. Trebuie să determinăm pe $a\in\mathbf{R}$, astfel încât oricare ar fi $x,y\in M=[1,+\infty)$ să rezulte $x*y\in M=[1,+\infty)$.

Avem: $x,y\in M=[1,+\infty)\Rightarrow x\geq 1, y\geq 1\Rightarrow x-1\geq 0$ și $y-1\geq 0$.

$x*y\in M=[1,+\infty)\Leftrightarrow x*y\geq 1\Leftrightarrow xy-x-y+a\geq 1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow xy-x-y+1+a\geq 1+1\Leftrightarrow x(y-1)-(y-1)\geq 2-a\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (y-1)(x-1)\geq 2-a\Leftrightarrow 2-a\leq 0\Leftrightarrow a\geq 2$.

5. Arătați că următoarele legi de compoziție sunt comutative:

a) $x*y=7xy-7\cdot(x+y)+8$ pe $(1,+\infty)$

b) $x*y=\dfrac{xy-6}{x+y-5}$ pe $\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$

Soluție. Se arată mai întâi că mulțimile $(1, +\infty)$ și $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ sunt părți stabile ale lui R în raport cu legea $*$ corespunzătoare.

a) $x * y = 7xy - 7(x + y) + 8 = 7yx - 7(y + x) + 8 = y * x$.

b) $x * y = \dfrac{xy-6}{x+y-5} = \dfrac{yx-6}{y+x-5} = y * x$.

6. Arătați că următoarele legi de compoziţie nu sunt comutative:

a) înmulţirea pe mulţimea $\mathrm{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 2x & 3y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbf{N} \right\}$;

b) $x * y = x^{y+1}$ pe **N.**

Soluție. a) Fie $A, B \in \mathrm{M}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Atunci:

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 28 & 20 \end{pmatrix}$ și $BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix}$. Evident $AB \neq BA$ și înmulțirea nu este comutativă.

b) Luăm $x = 2, y = 4$ și avem: $2 * 4 = 2^{4-1} = 2^3 = 8$ și $4 * 2 =$
$= 4^{2-1} = 4$. Evident $2 * 4 \neq 4 * 2$ și legea $*$ nu este comutativă.

7. Arătați că următoarele legi de compoziţie sunt asociative:

a) $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ pe $(-1, 1)$;

b) $x * y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}$ pe $(1, +\infty)$

Soluție. a) Fie $x, y, z \in (-1, 1)$. Avem:

$$(x * y) * z = \frac{x+y}{1+xy} * z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} \cdot z} = \dots = \frac{x+y+z(1+xy)}{1+xy+(x+y)z} =$$

$$= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}.$$

$$x * (y * z) = x * \frac{y+z}{1+yz} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \cdot \frac{y+z}{1+yz}} = \frac{x(1+yz)+y+z}{1+yz+x\cdot(y+z)} = \dots =$$

$$= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}.$$

Evident $(x * y) * z = x * (y * z)$ $(\forall) x, y, z \in (-1, 1)$ și atunci legea $*$ este asociativă.

b) Fie $x, y, z \in (1, \infty)$. Avem:

$(x * y) * z = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2} * z =$

$= \sqrt{(x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2)z^2 - (x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2) - z^2 + 2} =$

$= \cdots = \sqrt{x^2y^2z^2 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2 + x^2 + y^2 + z^2}$.

$x * (y * z) = x * \sqrt{y^2z^2 - y^2 - z^2 + 2} =$

$= \sqrt{x^2(y^2z^2 - y^2 - z^2 + 2) - x^2 - (y^2z^2 - y^2 - z^2 + 2) + 2} =$

$= \cdots = \sqrt{x^2y^2z^2 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2 + x^2 + y^2 + z^2}$.

Evident $(x * y) * z = x * (y * z)\ (\forall)x, y, z \in (1, \infty)$ și atunci legea $*$ este asociativă.

8. Arătați că următoarea lege de compoziție nu este asociativă:

$$x * y = \frac{x + y}{x^2 + y^2} \text{ pe } \mathbf{R} - \{1\}.$$

Soluție. Fie $0, 2, 3 \in \mathbf{R} - \{1\}$. Avem:

$$0 * (2 * 3) = 0 * \frac{2+3}{2^2+3^2} = 0 * \frac{5}{13} = \frac{0+\frac{5}{13}}{0^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{13}{5}.$$

$$(0 * 2) * 3 = \frac{0+2}{0^2+2^2} * 3 = \frac{1}{2} * 3 = \frac{\frac{1}{2}+3}{\frac{1}{4}+9} = \frac{14}{37}.$$

Evident $0 * (2 * 3) \neq (0 * 2) * 3$ și legea $*$ nu este asociativă.

9. Calculați elementul neutru față de legea:

a) $x * y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}$ pe $(0,1)$;

b) $x * y = x^{3 \ln y}$ pe $(0,1) \cup (1, +\infty)$.

Soluție. a) Fie $e \in (0, 1)$ elementul neutru. Deoarece legea $*$ este comutativă determinăm pe $e \in (0, 1)$ din egalitatea $x * e = x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{xe}{2xe - x - e + 1} = x, (\forall)x \in (0, 1) \Leftrightarrow xe = 2x^2e - x^2 - ex + x$

$(\forall)x \in (0, 1) \Leftrightarrow 2e(x - x^2) = x - x^2\ (\forall)x \in (0, 1)$.

Cum $x \in (0, 1) \Rightarrow x - x^2 \neq 0$ și atunci simplificând cu $x - x^2$ obținem $2e = 1 \Rightarrow e = \dfrac{1}{2} \in (0, 1)$. Elementul neutru este $\dfrac{1}{2}$.

b) Fie $E \in (0,1) \cup (1,\infty)$ elementul neutru. Deoarece legea $*$ este comutativă determinăm pe E din egalitatea $x * E = x \Leftrightarrow x^{3\ln E} = x$ sau $3\ln E = 1 \Rightarrow \ln E = \frac{1}{3} \Rightarrow E = e^{\frac{1}{3}}$.

10. Să se arate că nu există element neutru față de legea:

$$x * y = \frac{4xy+3}{4x+4y+4} \text{ pe } \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right).$$

Soluție. Presupunem că există element neutru e față de legea $*$ care este comutativă. Atunci $x * e = x \Rightarrow \frac{4xe+3}{4x+4e+4} = x \Rightarrow$
$\Rightarrow 4xe + 3 = 4x^2 + 4xe + 4x \Rightarrow 4x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \notin \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ și $x_2 = -\frac{3}{2} \notin \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$.

11. Studiați simetrizabilitatea elementelor următoarelor mulțimi în raport cu legile de compoziție specificate:

a) $M = [4, +\infty)$; $x * y = \sqrt{x^2 + y^2 - 16}$

b) $M = (0,1)$; $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$.

Soluție. a) Se calculează mai întâi elementul neutru care este 4.

Deoarece legea $*$ este comutativă, pentru orice $x \in [4, +\infty)$ determinăm $x' \in [4, +\infty)$ astfel încât $x * x' = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + x'^2 - 16} =$
$= 4 \Rightarrow x^2 + x'^2 - 16 = 16 \Rightarrow x'^2 = 32 - x^2 \Rightarrow x' = \sqrt{32 - x^2}$.

Trebuie să demonstrăm că $x' \in [4, +\infty) \Leftrightarrow x' \geq 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x'^2 \geq 16 \Leftrightarrow 32 - x^2 \geq 16 \Leftrightarrow x^2 \leq 16$, adevărat.

b) Elementul neutru este $\frac{1}{2}$ și atunci avem:

$$x * x' = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{xx'}{2xx' - x - x' + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x' = 1 - x.$$

Evident dacă $x \in (0, 1) \Rightarrow x' \in (0, 1)$.

12. Fie $*$ o lege de compoziție asociativă definită pe mulțimea E. Să se demonstreze că dacă $a * x = x * a$ și $a * y = y * a$, atunci are loc relația $a * (x * y) = (x * y) * a$.

Soluție. Avem: $a*(x*y)=(a*x)*y=(x*a)*y=$
$=x*(a*y)=x*(y*a)=(x*y)*a$

13. Fie legea de compoziție definită pe **R** prin:

$$x*y=axy-b\cdot(x+y)+c;\ \ a,b,c\in\mathbf{R}$$

Să se determine relația ce există între a, b, c astfel încât legea de compoziție să fie asociativă.

Soluție. Avem: $x*(y*z)=(x*y)*z \quad (\forall)\ x,y,z\in R\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2xyz-ab\cdot(xy+xz+yz)+(ac-b)\cdot x+b^2(y+z)-$
$-bc+c=a^2xyz-ab\cdot(xy+xz+yz)+(ac-b)\cdot z+$
$+b^2(x+y)-bc+c\Leftrightarrow(ac-b-b^2)\cdot(x-z)=0$
$(\forall)\ x,z\in R\Leftrightarrow ac-b-b^2=0\Leftrightarrow b^2+b=ac$